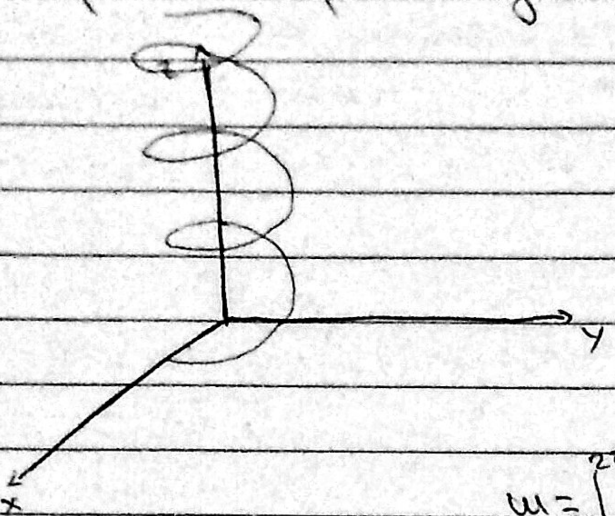
24/02/16

Παράδειγμα

Ένα ελατήριο περιγράφεται από την ελικοειδή καμπύλη

$\vec{r}(t) = \cos(4t)\hat{i} + \sin(4t)\hat{j} + t\hat{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

Αν $\rho = 1$ η πυκνότητα μάζας του, να βρεθεί το κέντρο μάζας του και η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα των z



$$m = \int_C \rho\, ds = \int_C ds$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} \text{ ή } ds = |\dot{\vec{r}}|\,dt$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -4\sin(4t)\hat{i} + 4\cos(4t)\hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{[-4\sin(4t)]^2 + [4\cos(4t)]^2 + 1} = \sqrt{17}$$

$$m = \int_0^{2\pi} |\vec{v}|\,dt = \sqrt{17}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{17}$$

$$M_{xy} = \int_C z\rho\, ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{17}\,dt = 2\pi^2\sqrt{17}$$

$$M_{xz} = \int_C y\rho\, ds = \int_0^{2\pi} \sin(4t)\sqrt{17}\,dt = 0$$

$$M_{yz} = \int_C x\rho\, ds = \int_0^{2\pi} \cos(4t)\sqrt{17}\,dt = 0$$

Άρα $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{m} = \dfrac{2\pi^2\sqrt{17}}{2\pi\sqrt{17}} = \pi$

$$I_z = \int_C (x^2+y^2)\rho\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\,dt = 2\pi\sqrt{17}$$

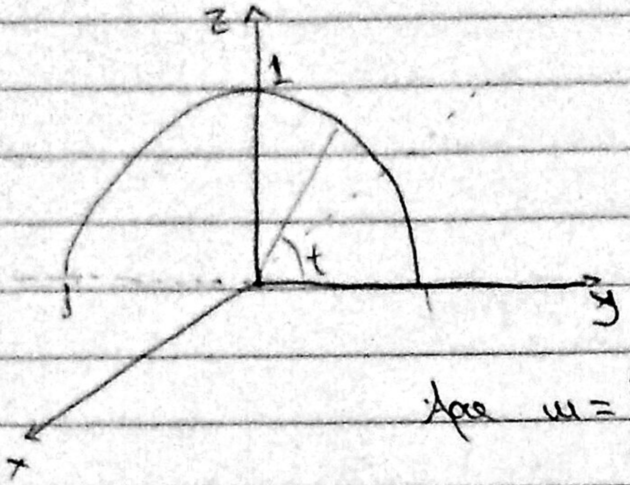
Παράδειγμα

Θεωρούμε μεταλλικό τόξο ημικυκλικού σύρματος στο επίπεδο yz.

$y^2+z^2=1$

$z\geq 0$

Να βρεθεί το κέντρο μάζας του, αν η πυκνότητα μάζας είναι $\rho=2-z$



$$m=\int_C \rho\, ds$$

$$\vec{r}(t)=0\hat{i}+\cos t\,\hat{j}+\sin t\,\hat{k},\quad 0\leq t\leq \pi$$

$$\vec{v}(t)=0\hat{i}-\sin t\,\hat{j}+\cos t\,\hat{k}$$

$$|\vec{v}|=1$$

Άρα $$m=\int_0^{\pi}(2-\sin t)\underbrace{1\,dt}_{|\vec{v}|dt=ds}=\int_0^{\pi}(2-\sin t)\,dt$$
$$=2t+\cos t\Big|_0^{\pi}$$
$$=2\pi-1-1=2\pi-2$$

$$M_{yz}=\int_C x\rho\, ds=\int_0^{\pi}0\,(2-z)\,dt=0$$

$$M_{xz}=\int_C y\rho\, ds=\int_0^{\pi}\cos t(2-\sin t)\,dt=2\int_0^{\pi}\cos t\,dt-\int_0^{\pi}\underbrace{\cos t\sin t\,dt}_{\frac{1}{2}\sin(2t)}=0$$

$$M_{xy}=\int_C z\rho\, ds=\int_0^{\pi}\sin t(2-\sin t)\,dt=\frac{8-\pi}{2}$$

Χρήσιμες τριγωνομετρικές

$\cos^2 t+\sin^2 t=1$

$\cos^2 t-\sin^2 t=\cos(2t)$

$2\sin t\cos t=\sin(2t)$

$$\bar{x}=\bar{y}=0$$

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{\frac{8-\pi}{2}}{2\pi-2}$$

Διανυσματικά Πεδία

Όταν κινούμαστε στο χώρο, χρησιμοποιούμε διανυσματικά μεγέθη για να περιγράψουμε διάφορα φυσικά φαινόμενα, πχ τη κίνηση ενός σωματιδίου. Πριν την έννοια της κίνησης, πρέπει να έχουμε μια αίσθηση της κατεύθυνσης

Ορισμός

Διανυσματικό πεδίο σε μια περιοχή του χώρου ή του επιπέδου είναι η συνάρτηση που αντιστοιχεί ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο της περιοχής αυτής. Συμβολίζουμε

$\vec{F}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\hat{i} + f_2(x,y,z)\hat{j} + f_3(x,y,z)\hat{k}$ στο χώρο

ή $\vec{F}(x,y) = f_1(x,y)\hat{i} + f_2(x,y)\hat{j}$

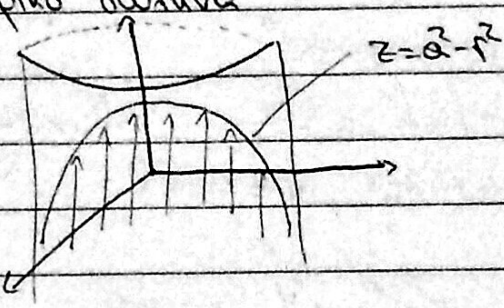
Το πεδίο έχει τις ιδιότητες των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3 κτλ.
(δηλ είναι συνεχές, αν οι συναρτήσεις είναι συνεχείς, είναι παραγωγίσιμο αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες)

Παράδειγμα

1) Το βαρυτικό πεδίο της γης: $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

2) Ροή υλικού σε κυλινδρικό σωλήνα

$\vec{v} = (a^2 - r^2)\hat{k}$



Για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση, μπορούμε να ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο, και γράφουμε:

Αν f είναι διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Παράδειγμα

$f = xyz$, $\vec{F} = \vec{\nabla} f = (yz)\hat{i} + (xz)\hat{j} + (xy)\hat{k}$

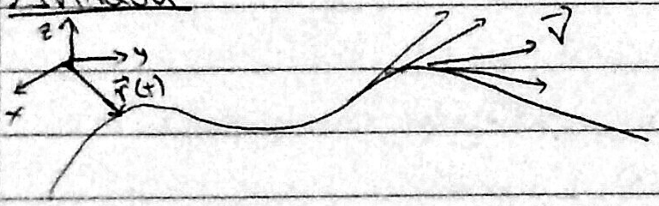
Άρα σε κάθε σημείο της τροχιάς ενός σώματος, αντιστοιχούμε το διάνυσμα της ταχύτητάς του, που αντιστοιχεί σε ένα διανυσματικό πεδίο. Εν γένει κίνηση μπορεί να υπάρξει εξαιτίας πεδίων στο χώρο

Κίνηση υλικού σημείου

Όταν ένα υλικό σημείο κινείται στο χώρο κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος, οι αντίστοιχες συντεταγμένες του είναι συναρτήσεις του χρόνου (δηλ. $(x,y,z) = (x(t), y(t), z(t))$)
Τα σημεία (x,y,z) αποτελούν μια καμπύλη στο χώρο, που καλείται τροχιά του υλικού σημείου.
Το διάνυσμα $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$
με αρχή την αρχή των αξόνων και κατάληξη τη θέση του σωματιδίου για κάθε χρόνο, καλείται διάνυσμα θέσης
Η παράγωγος $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$

ονομάζεται διάνυσμα ταχύτητας και είναι εφαπτόμενο στη καμπύλη τροχιάς του σημείου
Η δεύτερη παράγωγος $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt}\hat{k}$ είναι το διάνυσμα της επιτάχυνσης
Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, καθορίζει τη φορά της κίνησης και πλέον θα γράφουμε $\vec{v} = |\vec{v}|\hat{\tau}$

Δηλαδή



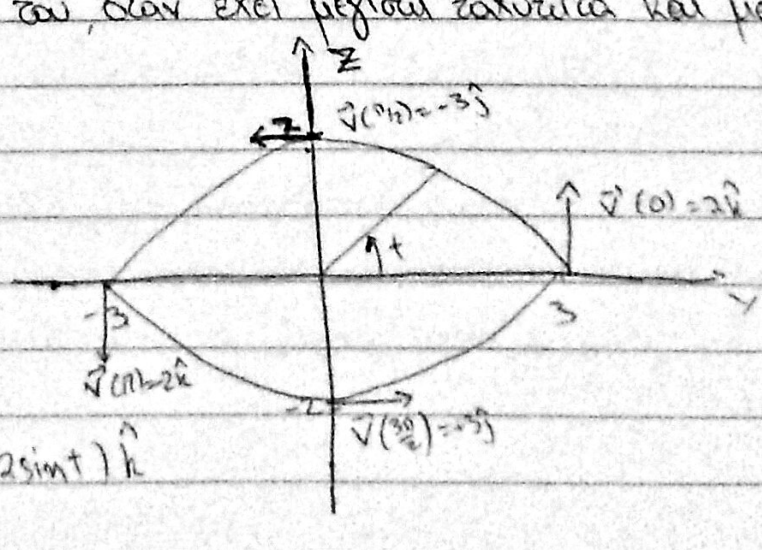
Σε κάθε σημείο έχω μια ταχύτητα της οποίας η φορά καθορίζει την κίνηση

Παράδειγμα

Ένα σωματίδιο κινείται στην ελλειπτική τροχιά του επιπέδου yz
Να βρεθεί η θέση του, όταν έχει μέγιστη ταχύτητα και μέγιστη επιτάχυνση

$\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1$

Λύση



$y = 3\cos t$
$z = 2\sin t$
άρα $\vec{r}(t) = (3\cos t)\hat{j} + (2\sin t)\hat{k}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-3\sin t)\hat{j} + (2\cos t)\hat{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9\underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} + 4\cos^2 t} = \sqrt{9-5\cos^2 t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-3\cos t)\hat{j} + (-2\sin t)\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9\cos^2 t + 4\sin^2 t} = \sqrt{4+5\cos^2 t}$$

για $t=\pi/2$ το μέτρο της ταχύτητας μεγιστοποιείται

$$|\vec{v}| = \max|\vec{v}| = 3$$
$$\vec{r}(\pi/2) = 2\hat{k}$$

για $t=3\pi/2$ $|\vec{v}| = \max|\vec{v}| = 3$

$$\vec{r}(3\pi/2) = -2\hat{k}$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας: $\vec{v}(\pi/2) = -3\hat{j}$

<u>Παρατήρηση</u>

Το μέτρο ενός διανύσματος, δεν δίνει μονοσήμαντη πληροφορία και δεν αναφέρεται στη φορά της κίνησης. Αντίστοιχα το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο για $t=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases}$, $|\vec{a}| = \max|\vec{a}| = 3$

<u>Παράδειγμα (Άσκηση)</u>

Να δείξετε ότι αν τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι κάθετα για κάθε t, τότε το υλικό σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα

<u>Λύση</u>

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$
$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}$$

αφού $\vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = 0$

$$\Rightarrow \int(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int \dot{x}\ddot{x}\,dt \xrightarrow[du=\ddot{x}dt]{u=\dot{x}} \int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{(\dot{x})^2}{2}$$

Αντίστοιχα βγαίνουν τα $\dot{y}\ddot{y}$, $\dot{z}\ddot{z}$ $\Rightarrow$ $\frac{(\dot{x})^2}{2} + \frac{(\dot{y})^2}{2} + \frac{(\dot{z})^2}{2} = c$

$\Rightarrow (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2 = C$

$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{C} = \text{σταθερό}$

Με βάση τα φυσικά μεγέθη που ήδη ορίσαμε, μπορούμε να βρούμε όλα (σχεδόν) τα χαρακτηριστικά της κίνησης.

1ον) Το μήκος της διαδρομής που διανύθηκε

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}|\, dt = \int_C ds$$

2ο) Ορίζουμε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα

$\hat{T} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ και η καμπυλότητα $\kappa = \dfrac{1}{|\vec{v}|}\left|\dfrac{d\hat{T}}{dt}\right|$